ขั้นตอนวิธีการแก้ปัญหาพีเซนเตอร์โดยการพัฒนาขอบเขตบน

สุภาลิน ศรัณย์วงศ์[1] สิทธิพงษ์ ด่านตระกูล[1] และ จูลิน ลิคะสิริ[2*]
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
อ.เมือง จ.เชียงใหม่ 50200

บทคัดย่อ

ปัญหาการเลือกตำแหน่งที่ตั้งที่เหมาะสมแบบไม่มีข้อจำกัดด้านความสามารถในผลิตถูกศึกษาผ่านปัญหาพีเซนเตอร์ในงานวิจัยชิ้นนี้ ซึ่งปัญหาดังกล่าวมีวัตถุประสงค์เพื่อให้ระยะทางระหว่างโรงงานที่เลือกเปิด p แห่งกับลูกค้าคนที่อยู่ไกลที่สุดของแต่ละโรงงานมีค่าน้อยที่สุด ในบทความนี้ได้นำเสนอข้อเสนอเพื่อลดขนาดของบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้และช่วยปรับปรุงค่าขอบเขตบนของปัญหาให้มีค่าลดลงจากเดิม วิธีการหาคำตอบแบบฮิวริสติกส์ในงานวิจัยนี้ได้สร้างขึ้นโดยอาศัยข้อเสนอที่ได้กล่าวมาข้างต้นเพื่อช่วยในการปรับปรุงค่าขอบเขตบนของปัญหาให้มีค่าดีขึ้น อีกทั้งยังมีการนำเสนอตัวอย่างและจำลองสถานการณ์ทางคอมพิวเตอร์สำหรับปัญหาพีเซนเตอร์เพื่อแสดงวิธีการทำงานของขั้นตอนวิธีที่ได้นำเสนอในงานวิจัยชิ้นนี้ ซึ่งผลจากการจำลองสถานการณ์ทางคอมพิวเตอร์สำหรับปัญหาพีเซนเตอร์แสดงให้เห็นว่าขั้นตอนวิธีที่ได้นำเสนอในงานชิ้นนี้สามารถแก้ปัญหาที่มีจำนวนลูกค้าและสถานให้บริการได้มากที่สุดถึง 5000 x 1000 โดยใช้เวลาในการคำนวณไม่เกิน 22 นาที ในขณะที่ผลเฉลยที่ดีที่สุดสามารถหาค่าได้เมื่อปัญหามีจำนวนลูกค้าและสถานให้บริการมากที่สุดเพียง 300 x 30 เท่านั้น นอกจากนี้ผลจากการจำลองสถานการณ์ทางคอมพิวเตอร์ยังแสดงให้เห็นว่าระยะห่างระหว่างผลเฉลยที่ได้จากขั้นตอนวิธีที่ได้นำเสนอในงานวิจัยนี้กับผลเฉลยที่ดีที่สุดมีค่าไม่เกิน 1% สำหรับปัญหาที่มีจำนวนลูกค้าและสถานให้บริการน้อยกว่า 200 x 20 และไม่เกิน 17% สำหรับปัญหาที่มีขนาด 300 x 30

คำสำคัญ: ปัญหาการเลือกตำแหน่งที่ตั้ง, ปัญหาพีเซนเตอร์, การหาคำตอบแบบฮิวริสติกส์

* Corresponding author. E-mail: chulin.l@cmu.ac.th

[1] นักศึกษาปริญญาดุษฎีบัณฑิต ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

[2] รองศาสตราจารย์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Algorithm for Solving the P-center Problem via Upper Bound Development

Supalin Saranwong[1] Sittipong Dantrakul[1] and Chulin Likasiri [2*]
Department of Mathematics, Faculty of Science, Chiang Mai University,
Mueang, Chiang Mai 50200

Abstract

The uncapacitated location problem in this work was studied via the *p*-center problem where the distances between *p* chosen facilities and their farthest customer were minimized. Propositions were proposed to reduce the feasible region and hence the upper bound of the solution was decreased. A heuristic was constructed around the propositions in order to obtain a better upper bound of the problem. An example is given regarding the increase of the processes of the proposed algorithm. Computer simulations were conducted on problem sizes up to 5000 x 1000 (customers x facilities) using the proposed algorithm where the best solution was found to be less than 22 minutes. The optimal solution was found only with problem sizes up to 300 x 30. The results showed that the differences between the optimal solutions and the solutions obtained using the proposed algorithm were at most 1% in all cases smaller than 200 x 20 and at 17% for 300 x 30 instances.

Keywords: Location problem, P-center problem, Heuristic algorithm

* Corresponding author. E-mail: chulin.l@cmu.ac.th
[1] Doctor of Philosophy Student in Department of Mathematics, Faculty of Science, Chiang Mai University
[2] Associate Professor in Department of Mathematics, Faculty of Science, Chiang Mai University

1. บทนำ

ปัญหาการเลือกตำแหน่งที่ตั้งสถานให้บริการต่างๆ เป็นปัญหาที่สำคัญสำหรับองค์กร เนื่องจากการตัดสินใจเลือกตำแหน่งที่ตั้งมีผลโดยตรงต่อการดำเนินงานต่างๆในองค์กร เช่น การจัดสรรลูกค้าไปยังสถานที่ให้บริการ การวางแผนการผลิตและกลยุทธการตลาด ซึ่งส่งผลกระทบต่อความอยู่รอดขององค์กร ดังนั้นปัญหาการเลือกตำแหน่งที่ตั้งสถานให้บริการจึงเป็นปัญหาได้รับความสนใจและมีการศึกษาหาวิธีหาคำตอบอย่างแพร่หลาย ปัญหาพีเซนเตอร์ (*p*-center problem) เป็นปัญหาการเลือกตำแหน่งที่เหมาะสมสำหรับการจัดตั้งสถานให้บริการจำนวน p แห่ง โดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อให้ระยะทางระหว่างสถานให้บริการกับลูกค้าคนที่อยู่ไกลที่สุดมีค่าน้อยที่สุด ปัญหาดังกล่าวจัดเป็นปัญหาการจับกลุ่ม (clustering problem) ในรูปแบบหนึ่ง เนื่องจากลักษณะปัญหาเปรียบเสมือนการแบ่งกลุ่มลูกค้าออกเป็น p กลุ่ม เพื่อให้สอดคล้องกับฟังก์ชันวัตถุประสงค์ ตัวอย่างของปัญหาในลักษณะนี้ ได้แก่ การเลือกตำแหน่งที่ตั้งสถานีดับเพลิง สถานีตำรวจ โรงพยาบาล ศูนย์บริการข้อมูล เป็นต้น

ปัญหาพีเซนเตอร์สามารถแบ่งออกเป็น 2 ประเภทหลักๆ คือ ปัญหาแบบไม่มีข้อจำกัดและปัญหาแบบมีข้อจำกัด โดยปัญหาแบบไม่มีข้อจำกัดนั้นจะไม่พิจารณาขีดความสามารถในการให้บริการของผู้ให้บริการและความต้องการของลูกค้า ในขณะที่ปัญหาแบบมีข้อจำกัดนั้นจะนำขีดความสามารถในการให้บริการของผู้ให้บริการและความต้องการของลูกค้ามาพิจารณาในการเลือกตำแหน่งที่ตั้งสถานให้บริการด้วย ปัญหาแบบมีข้อจำกัดบางปัญหาสามารถนำมาพิจารณาเป็นแบบไม่มีข้อจำกัดได้ โดยการกำหนดว่าลูกค้าแต่ละคนนั้นไม่ต้องการเข้ารับบริการพร้อมกัน เช่น ปัญหาการเลือกตำแหน่งที่ตั้งสถานีรถดับเพลิง สถานีตำรวจนั้นเป็นปัญหาแบบมีข้อจำกัดขีดความสามารถในการให้บริการของสถานที่เหล่านี้ แต่ในความเป็นจริงแล้วสถานที่เหล่านี้สามารถให้บริการแก่ผู้ที่ต้องการรับบริการได้อย่างทั่วถึง

เนื่องจากปัญหาพีเซนเตอร์เป็นปัญหาเอ็นพีแบบยาก (NP-Hard) ซึ่งยากต่อการหาคำตอบ [1,2] ดังนั้นการพัฒนาวิธีการหาคำตอบของปัญหานี้สามารถแบ่งออกเป็น 2 กลุ่มใหญ่ๆคือ การพัฒนาวิธีการหาคำตอบที่ดีที่สุดแบบวิธีแม่นตรง (exact algorithms) และการพัฒนาวิธีการหาคำตอบแบบฮิวริสติกส์ (heuristic algorithms) โดยวิธีการหาคำตอบแบบฮิวริสติกส์จะใช้เวลาในการหาคำตอบน้อยกว่าวิธีการหาคำตอบที่ดีที่สุด แต่คำตอบที่ได้นั้นไม่ใช่คำตอบที่ดีที่สุด เป็นเพียงคำตอบที่ยอมรับได้หรือมีค่าความคาดเคลื่อนของคำตอบไม่เกินค่าที่กำหนดไว้ งานวิจัยทางด้านการหาคำตอบที่ดีที่สุดแบบวิธีแม่นตรงที่มีการพัฒนาอย่างโดดเด่นในปัญหาพีเซนเตอร์คือ วิธีการหาคำตอบโดยการใช้เครื่องมือที่มีอยู่แล้วในการแก้ปัญหาเชิงเส้นจำนวนเต็มแบบผสมสำหรับปัญหาครอบคลุม (covering problem) จากนั้นทำซ้ำเพื่อหารัศมีที่น้อยที่สุดที่สามารถให้บริการแก่ลูกค้าทุกคนได้ [3] ต่อมาในปีค.ศ. 2010 ขั้นตอนวิธีในการหาคำตอบใน [4] ได้นำเสนอการผ่อนปรนปัญหาครอบคลุมแบบลากรางจ์ (Lagrangian relaxation) แทนการใช้เครื่องมือที่มีอยู่ก่อนแล้ว ซึ่งงานวิจัยส่วนใหญ่จะเน้นไปที่การพัฒนาวิธีการหาคำตอบแบบฮิวริสติกส์เนื่องจากใช้เวลาน้อยและได้คำตอบที่สามารถยอมรับได้ ในขณะที่การพัฒนาวิธีการหาคำตอบที่ดีที่สุดนั้นมีความยากและความซับซ้อนทางคณิตศาสตร์มากกว่า ตั้งแต่อดีตจนถึงปัจจุบันมีนักวิจัยมากมายได้คิดค้นและพัฒนาวิธีการหาคำตอบแบบฮิวริสติกส์สำหรับปัญหาพีเซนเตอร์ เช่น วิธีการค้นหาคำตอบในบริเวณใกล้เคียง (local search) [5] วิธีการค้นหาแบบทาบู (tabu search) [6] วิธีการค้นหาคำตอบแบบประสาน (harmony search) [7] วิธีการเชิงพันธุกรรม (genetic algorithm) [8] และวิธีอาณานิคมผึ้ง (bee colony algorithm) [9] เป็นต้น

งานวิจัยนี้ได้นำเสนอขั้นตอนวิธีการหาคำตอบแบบฮิวริสติกส์เพื่อแก้ปัญหาพีเซนเตอร์แบบไม่มีข้อจำกัด อีกทั้งยังได้นำเสนอข้อเสนอเพื่อช่วยในการลดขนาดบริเวณคำตอบที่เป็นไปได้ (feasible region) ที่จะนำมาพิจารณาเพื่อพัฒนาคำตอบ นอกจากนี้ในงานวิจัยนี้ยังมีการแสดงตัวอย่างขั้นตอนวิธีในการหาคำตอบอย่างละเอียด และเปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้จากขั้นตอนวิธีที่นำเสนอกับผลเฉลยที่ดีที่สุดอีกด้วย

2. ตัวแบบทางคณิตศาสตร์

ปัญหาพีเซนเตอร์เป็นปัญหาการเลือกตำแหน่งที่ตั้งสำหรับการเปิดสถานให้บริการจำนวน p แห่ง เพื่อให้ระยะทางระหว่างสถานให้บริการกับลูกค้าคนที่ไกลที่สุดมีค่าน้อยที่สุด ในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาปัญหาพีเซนเตอร์แบบไม่มีข้อจำกัดด้านขีดความสามารถในการผลิตหรือขีดความสามารถด้านความจุของสถานให้บริการ กำหนดให้ n แทนจำนวนลูกค้าทั้งหมดและ m แทนจำนวนตำแหน่งที่สามารถสร้างสถานให้บริการได้ ปัญหาดังกล่าวสามารถเขียนให้อยู่ในรูปตัวแบบทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

(P) $\min \; z$

$$\text{s.t.} \quad z \geq \sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij}, \quad \forall i \in I \qquad (1)$$

$$\sum_{j \in J} y_j = p \qquad (2)$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = 1, \qquad \forall i \in I \tag{3}$$

$$x_{ij} - y_j \le 0, \qquad \forall i \in I, j \in J \tag{4}$$

$$x_{ij}, y_j \in \{0,1\}, \quad \forall i \in I, j \in J$$

โดย $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ คือ เซตของลูกค้า

$J = \{1, 2, \ldots, m\}$ คือ เซตของตำแหน่งที่เหมาะสมในการสร้างสถานให้บริการ

d_{ij} คือ ระยะทางระหว่างลูกค้าคนที่ i และสถานบริการ j

x_{ij} คือ ตัวแปรตัดสินใจ โดยจะมีค่าเท่ากับ 1 เมื่อลูกค้าคนที่ i ตัดสินใจรับบริการจากสถานบริการ j และมีค่าเท่ากับ 0 เมื่อตัดสินใจไม่รับบริการ

y_j คือ ตัวแปรตัดสินใจ โดยจะมีค่าเท่ากับ 1 เมื่อมีการตัดสินใจเลือกสร้างสถานให้บริการที่ตำแหน่ง j และมีค่าเท่ากับ 0 เมื่อตัดสินใจไม่สร้างสถานให้บริการที่ตำแหน่ง j

ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของตัวแบบนี้เป็นการทำให้ระยะทางระหว่างลูกค้าคนที่ไกลที่สุดกับสถานให้บริการทุกแห่งมีค่าน้อยที่สุดดังแสดงในเงื่อนไขบังคับที่ (1) เงื่อนไขบังคับ (2) แสดงข้อจำกัดของจำนวนตำแหน่งที่ตั้งสถานให้บริการ โดยตำแหน่งที่ถูกเลือกเพื่อใช้ในการจัดตั้งสถานให้บริการต้องมีเท่ากับ p แห่งเท่านั้น เงื่อนไขบังคับ (3) แสดงให้เห็นว่าลูกค้าทุกคนจะต้องได้รับบริการจากสถานให้บริการแห่งใดแห่งหนึ่ง เงื่อนไขบังคับ (4) เป็นข้อจำกัดที่ว่าลูกค้าจะได้รับบริการจากสถานบริการที่มีการเปิดให้บริการเท่านั้น

3. ขั้นตอนวิธีการหาคำตอบ

งานวิจัยนี้ได้นำเสนอขั้นตอนวิธีการหาคำตอบแบบฮิวริสติกส์ โดยเริ่มจากการหาคำตอบเริ่มต้นที่เป็นไปได้และกำหนดให้ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ที่สอดคล้องกับคำตอบนั้นเป็นค่าขอบเขตบนของปัญหา จากนั้นทำการพัฒนาคำตอบเพื่อให้ค่าขอบเขตบนที่สอดคล้องกับคำตอบดังกล่าวมีค่าดีขึ้นจนไม่สามารถพัฒนาค่าขอบเขตบนให้มีค่าดีขึ้นได้แล้ว คำตอบที่สอดคล้องกับค่าขอบเขตบนดังกล่าวจะเป็นคำตอบที่เป็นไปได้ที่ดีที่สุดสำหรับปัญหาพีเซนเตอร์

ข้อเสนอที่ 1 ถ้าระยะทางระหว่างลูกค้าคนที่ i และสถานให้บริการ j มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับค่าขอบเขตบน $(d_{ij} \ge u)$ แล้วลูกค้าคนที่ i จะตัดสินใจไม่รับบริการจากสถานที่ให้บริการ j $(x_{ij} = 0)$

พิสูจน์ ให้ $\tilde{x}_{ij}$ เป็นคำตอบของปัญหา (P) และ u แทนขอบเขตบนที่สอดคล้องกับคำตอบ $\tilde{x}_{ij}$ นั่นคือ $u = z_1 = \min \max \ d_{ij}\tilde{x}_{ij}$

ถ้า $d_{i'j'} \ge u$ และ $x_{i'j'} = 1$ แล้ว $\sum_{\substack{i \in I \\ i \ne i'}} \sum_{\substack{j \in J \\ j \ne j'}} d_{ij}x_{ij} + d_{i'j'}x_{i'j'} \ge \sum_{\substack{i \in I \\ i \ne i'}} \sum_{\substack{j \in J \\ j \ne j'}} d_{ij}x_{ij} + u \ge u$ จะเห็นได้ค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของปัญหาพีเซนเตอร์มีค่ามากขึ้นหรือเท่าเดิม ดังนั้นหากต้องการปรับปรุงค่าขอบเขตบนของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ให้ดีขึ้น เมื่อ $d_{ij} \ge u$ แล้วกำหนดให้ $x_{ij} = 0$ □

ข้อเสนอที่ 2 ถ้าระยะทางจากสถานที่ให้บริการ j ไปยังลูกค้าทุกคนมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับค่าขอบเขตบน $(d_{ij} \ge u, \ \forall i \in I)$ แล้วจะไม่ตัดสินใจเลือกเปิดสถานให้บริการที่ตำแหน่ง j $(y_j = 0)$

พิสูจน์ เห็นได้ชัดว่า สำหรับแต่ละพื้นที่พิจารณา j เมื่อ $d_{ij} \ge u, \ \forall i \in I$ ถ้าสร้างสถานให้บริการบนพื้นที่ j แล้วจะไม่สามารถปรับปรุงค่าขอบเขตบนให้มีค่าดีขึ้นได้ □

ข้อเสนอที่ 3 สำหรับลูกค้าที่มีระยะทางไปยังสถานให้บริการที่มีค่าไม่เกินค่าขอบเขตบนจำนวนน้อยที่สุด (เรียกว่า ลูกค้าคนที่ i) จำนวนคำตอบในการเลือกเปิดสถานให้บริการที่ทำให้สามารถปรับปรุงค่าขอบเขตบนให้ดีขึ้นจะมีค่าเท่ากับ $\binom{k}{1}\binom{n-1}{p-1}$ เมื่อ k คือจำนวนพื้นที่พิจารณาเพื่อเปิดสถานให้บริการที่มีระยะห่างไปยังจุดลูกค้าคนที่ i น้อยกว่าขอบเขตบน

พิสูจน์ พิจารณาลูกค้าคนที i ที่มีจำนวนระยะทาง $d_{ij} < u$ การเลือกเปิดสถานให้บริการบนพื้นที่พิจารณา j อย่างน้อย 1 แห่งจะสามารถปรับปรุงค่าของขอบเขตบนให้ดีขึ้นได้ ดังนั้นวิธีการเลือกเปิดสถานให้บริการ 1 แห่ง คือ $\binom{k}{1}$ เมื่อ k จำนวนพื้นที่พิจารณาเพื่อเปิดสถานให้บริการที่มีระยะห่างไปยังลูกค้าคนที่ i น้อยกว่าขอบเขตบน วิธีการเลือกเปิดสถานให้บริการที่เหลือ $p-1$ แห่ง คือ $\binom{n-1}{p-1}$ ดังนั้นจำนวนรูปแบบคำตอบในการเลือกเปิดสถานให้บริการทั้งหมด p แห่งที่ทำให้ค่าขอบเขตบนดีขึ้นเท่ากับ $\binom{k}{1}\binom{n-1}{p-1}$ □

ขั้นตอนวิธีที่นำเสนอในงานวิจัยนี้แบ่งออกเป็น 2 ขั้นตอน คือ 1. ขั้นตอนการหาคำตอบเริ่มต้นของปัญหา 2. ขั้นตอนการพัฒนาคำตอบ

ขั้นตอนการหาคำตอบเริ่มต้น

ขั้นที่ 1 กำหนดให้ $N=1$ เลือกเปิดสถานให้บริการ 1 แห่ง ณ ตำแหน่งที่มีระยะทางระหว่างสถานให้บริการไปยังลูกค้าที่อยู่ห่างไกลที่สุดน้อยที่สุด $\left(\min_{j\in J}\left\{\max_{i\in I} d_{ij}\right\}\right)$ เรียกสถานให้บริการนี้ว่า สถานให้บริการ j_N จากนั้นทำการจัดสรรลูกค้าสู่สถานให้บริการดังกล่าว

ขั้นที่ 2 พิจารณาลูกค้าคนที่อยู่ไกลจากสถานให้บริการ j_N ที่สุด เลือกเปิดสถานให้บริการที่อยู่ใกล้กับลูกค้าคนดังกล่าวมากที่สุด เรียกสถานให้บริการนี้ว่า สถานให้บริการ j_{N+1} จากนั้นทำการจัดสรรลูกค้าไปยังสถานให้บริการใหม่อีกครั้ง โดยจัดสรรลูกค้าแต่ละคนไปยังสถานให้บริการที่ใกล้ที่สุด และให้ $N=N+1$

ขั้นที่ 3 ถ้าสถานให้บริการที่เลือกเปิดมีจำนวนน้อยกว่า p $(N<p)$ แล้วกลับไปที่ขั้นที่ 2 กรณีอื่นๆ ไปยังขั้นตอนวิธีการพัฒนาคำตอบ

ขั้นตอนการพัฒนาคำตอบ

ขั้นที่ 1 กำหนดให้ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ที่สอดคล้องกับคำตอบเริ่มต้นจากขั้นตอนการหาคำตอบเริ่มต้นข้างต้นเป็นค่าขอบเขตบนของปัญหา

ขั้นที่ 2 กำหนดให้ปัญหาการเลือกตำแหน่งที่ตั้งยังไม่มีการเปิดสถานให้บริการที่จุดใดเลยและ $N=0$ พิจารณาระยะทางระหว่างลูกค้ากับสถานให้บริการ ถ้าระยะทางใดมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับค่าขอบเขตบน $(d_{ij}\geq u)$ แล้วกำหนดให้ระยะทางระหว่างลูกค้าคนที่ i กับสถานให้บริการ j มีค่ามากกว่าขอบเขตบนมากๆ (เรียกเมทริกซ์นี้ว่า $\mathbf{A}$)

ดังนั้น $\mathbf{A}=[a_{ij}]=\begin{cases} d_{ij}, & d_{ij}<u \\ M, & d_{ij}\geq u \end{cases}$ โดยที่ $M>>u$

ขั้นที่ 3 ถ้าแถวใดแถวหนึ่งในเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ มีสมาชิกทุกตัวเป็นค่าคงที่ M จบการทำงาน กรณีอื่นๆ ไปยังขั้นที่ 4

ขั้นที่ 4 ให้ $N=N+1$ พิจารณาลูกค้าที่มีจำนวนสถานให้บริการที่มีระยะทางระหว่างลูกค้าคนนั้นกับสถานให้บริการน้อยกว่าค่าขอบเขตบนน้อยที่สุด (เรียกว่าลูกค้าคนที่ i_N) พิจารณาสถานให้บริการ j ที่ $a_{i_N j}\neq M$ เลือกเปิดสถานให้บริการที่สามารถให้บริการแก่ลูกค้าได้มากที่สุด (เรียกว่า สถานให้บริการที่ j_N) ในกรณีที่ลูกค้ามีจำนวนสถานให้บริการที่ $a_{ij}\neq M$ น้อยที่สุดมากกว่า 1 คน พิจารณาสถานให้บริการ j ที่ $a_{ij}\neq M$ สำหรับลูกค้ากลุ่มดังกล่าว เลือกเปิดสถานให้บริการที่สามารถให้บริการแก่ลูกค้าได้มากที่สุด ในกรณีที่มีสถานให้บริการสามารถให้บริการแก่ลูกค้าจำนวนมากที่สุดมากกว่า 1 แห่ง ให้เลือกเปิดสถานให้บริการที่ระยะทางไปยังลูกค้าคนที่ไกลสุดมีค่าน้อยที่สุดก่อน เพื่อให้สอดคล้องกับฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของปัญหาพีเซนเตอร์ จากนั้นทำการจัดสรรลูกค้าแก่สถานให้บริการที่เปิด โดยให้ลูกค้ารับบริการจากสถานให้บริการที่ใกล้ที่สุด

ขั้นที่ 5 ให้ $N=N+1$ สำหรับสถานให้บริการที่เหลืออยู่ เลือกเปิดสถานให้บริการ 1 แห่งที่มีจำนวนลูกค้าที่ต้องให้บริการมากที่สุด (เรียกว่า สถานให้บริการที่ j_N) จากนั้นทำการจัดสรรลูกค้าไปยังสถานให้บริการใหม่อีกครั้ง โดยจัดสรรลูกค้าแต่ละคนไปยังสถานให้บริการที่ใกล้ที่สุด

ขั้นที่ 6 ถ้าสถานให้บริการที่เปิดจำนวนน้อยกว่า p แห่ง $(N<p)$ และยังสามารถปรับปรุงให้ค่าขอบเขตบนมีค่าดีขึ้นได้ (ไม่มีแถวใดมีสมาชิกทุกตัวเป็นค่าคงที่ M) แล้วไปยังขั้นที่ 4 ถ้าสถานให้บริการที่เปิดมีจำนวนเท่ากับจำนวนที่ต้องการ $(N=p)$ และลูกค้าทุกคนได้รับการให้บริการแล้วกำหนดให้ค่าขอบเขตบนใหม่มีค่าเท่ากับระยะทางระหว่างลูกค้ากับสถานให้บริการที่เปิดที่มีค่ามากที่สุด จากนั้นไปยังขั้นตอนที่ 2 ในกรณีอื่นๆ จบการทำงาน

ข้อเสนอ 4 ขั้นตอนวิธีการหาคำตอบของปัญหาพีเซนเตอร์ที่ได้นำเสนอไปข้างต้นมีประสิทธิภาพเป็น $O(n^2m^3)$ เมื่อ n คือจำนวนลูกค้า และ m คือจำนวนสถานที่ให้บริการ

พิสูจน์ ขั้นตอนการหาคำตอบเริ่มต้นนั้นจะประกอบไปด้วยขั้นตอนการเลือกเปิดสถานให้บริการครั้งละ 1 แห่งเป็นจำนวน p ครั้งและทำการจัดสรรลูกค้าไปยังสถานให้บริการในแต่ละครั้งที่มีการเปิดสถานให้บริการเพิ่มขึ้นจากเดิม ในการพิจารณาเลือกเปิดสถานให้บริการ 1 แห่งจากทั้งหมด m แห่ง สามารถจำกัดขอบเขตการปฏิบัติการได้ด้วย $O(m)$ และ การพิจารณาจัดสรรลูกค้า n คนไปยังสถานให้บริการสามารถจำกัดขอบเขตการปฏิบัติการได้ด้วย $O(n)$ ดังนั้นขั้นตอนการหาคำตอบเริ่มต้นมีความซับซ้อนทางขั้นตอนวิธีเท่ากับ $O(pnm)$

ขั้นตอนวิธีการพัฒนาคำตอบนั้นจะเป็นการเลือกเปิดสถานให้บริการครั้งละ 1 แห่งและทำการจัดสรรลูกค้าไปยังสถานให้บริการที่มีการเปิดให้บริการ เป็นจำนวนทั้งหมด

p ครั้ง และทำการปรับปรุงค่าขอบเขตบน โดยจะทำการปรับปรุงเมทริกซ์ระยะทางและทำซ้ำขั้นตอนข้างต้นไปเรื่อยๆ จนกว่าจะไม่สามารถพัฒนาค่าขอบเขตบนให้มีค่าดีขึ้นกว่าเดิมได้ ซึ่งในขั้นตอนการเปิดสถานให้บริการ p แห่ง และการจัดสรรลูกค้าคนไปยังสถานให้บริการนั้นสามารถจำกัดขอบเขตการปฏิบัติการได้ด้วย $O(pnm)$ ในการปรับปรุงเมทริกซ์ระยะทางนั้นสามารถจำกัดขอบเขตการปฏิบัติงานได้ด้วย $O(nm)$ ซึ่งการพัฒนาค่าขอบเขตบนสามารถทำได้อย่างมากที่สุด nm ครั้ง ดังนั้นขั้นตอนการพัฒนาคำตอบมีความซับซ้อนทางขั้นตอนวิธีเท่ากับ $O(n^2m^2 + pn^2m^2) \le O(n^2m^3)$ เนื่องจาก $p \le m$ □

4. ตัวอย่างขั้นตอนวิธีการหาคำตอบของปัญหาพีเซนเตอร์

กำหนดให้ลูกค้ามีจำนวน 10 คน และตำแหน่งพื้นที่ที่สามารถเปิดสถานให้บริการได้มีจำนวนทั้งหมด 5 แห่ง นั่นคือ $I = \{1, 2, \ldots, 10\}$ และ $J = \{1, 2, \ldots, 5\}$ ระยะทางระหว่างลูกค้ากับสถานให้บริการแสดงด้วยเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$D = \begin{bmatrix} 16 & 82 & 20 & 6 & 40 \\ 40 & 28 & 94 & 87 & 37 \\ 7 & 31 & 19 & 64 & 44 \\ 94 & 7 & 35 & 79 & 23 \\ 56 & 16 & 82 & 47 & 70 \\ 44 & 12 & 6 & 9 & 76 \\ 4 & 89 & 28 & 92 & 52 \\ 36 & 43 & 35 & 40 & 87 \\ 50 & 56 & 34 & 69 & 32 \\ 57 & 36 & 99 & 21 & 23 \end{bmatrix}$$

เนื่องจากตัวแปรตัดสินใจ x_{ij} มีค่าเท่ากับ 1 เมื่อลูกค้าคนที่ i ตัดสินใจรับบริการจากสถานบริการ j และมีค่าเท่ากับ 0 เมื่อตัดสินใจไม่รับบริการ และตัวแปรตัดสินใจ y_j มีค่าเท่ากับ 1 เมื่อมีการตัดสินใจเลือกสร้างสถานให้บริการที่ตำแหน่ง j และมีค่าเท่ากับ 0 ในกรณีอื่น ดังนั้นตัวแปรตัดสินใจ $\mathbf{x} \in \mathbb{B}^{10\times 5}$ และ $\mathbf{y} \in \mathbb{B}^5$

หากต้องการตำแหน่งพื้นที่สำหรับการจัดตั้งสถานให้บริการจำนวน 2 แห่ง ขั้นตอนวิธีในการหาคำตอบและปรับปรุงค่าขอบเขตบนสำหรับปัญหานี้สามารถทำได้ดังนี้

<u>ขั้นตอนการหาคำตอบเริ่มต้น</u>

ขั้นที่ 1 กำหนดให้ $N = 1$ พิจารณาระยะทางระหว่างสถานให้บริการไปยังลูกค้าคนที่ไกลที่สุดแต่ละสถานให้บริการ นั่นคือ $d_{41} = 94,\ d_{72} = 89,\ d_{103} = 99,$ $d_{74} = 92$ และ $d_{85} = 87$ เลือกเปิดสถานให้บริการที่มีระยะทางไปยังลูกค้าคนที่ไกลที่สุดมีค่าน้อยที่สุด 1 แห่ง จากตารางที่ 1 จะเห็นได้ว่าสถานให้บริการที่ 5 มีระยะทางจากสถานให้บริการไปยังลูกค้าคนที่ไกลที่สุดมีค่าน้อยที่สุด คือ 87 ดังนั้นจึงเลือกเปิดสถานให้บริการที่ตำแหน่ง $j_1 = 5$ (เรียกว่า *สถานให้บริการที่จุด 5*) จากนั้นจัดสรรลูกค้าทุกคนไปยังสถานให้บริการดังกล่าว

ตารางที่ 1 ระยะทางระหว่างลูกค้าที่ถูกจัดสรรให้แก่สถานให้บริการ 1 แห่ง แสดงโดยการขีดเส้นใต้

ลูกค้า/สถานให้บริการ	1	2	3	4	5
1	16	82	20	6	<u>40</u>
2	40	28	94	87	<u>37</u>
3	7	31	19	64	<u>44</u>
4	94	7	35	79	<u>23</u>
5	56	16	82	47	<u>70</u>
6	44	12	6	9	<u>76</u>
7	4	89	28	92	<u>52</u>
8	36	43	35	40	<u>87</u>
9	50	56	34	69	<u>32</u>
10	57	36	99	21	<u>23</u>

จากตารางที่ 1 จะได้ว่าตัวแปรตัดสินใจในการเลือกเปิดสถานให้บริการมีค่าดังนี้ $\mathbf{y} = (0,0,0,0,1)$ และตัวแปรตัดสินใจในการเลือกรับบริการจากสถานให้บริการของลูกค้าแต่ละคนสามารถแสดงได้ด้วยเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ขั้นที่ 2 ลูกค้าคนที่อยู่ไกลจากสถานให้บริการที่จุด 5 มากที่สุดคือ ลูกค้าคนที่ 8 เนื่องจากลูกค้าคนที่ 8 ทำให้ค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของปัญหานี้มีค่ามาก ดังนั้นเราจึงต้องการที่จะเปิดสถานให้บริการอื่นเพื่อตอบสนองความ

ต้องการของลูกค้าคนที่ 8 นั่นคือเลือกสถานให้บริการที่ตำแหน่ง $j_2 = 3$ ที่อยู่ใกล้กับลูกค้าคนที่ 8 มากที่สุด (เรียกว่า *สถานให้บริการที่จุด 3*) จากนั้นทำการจัดสรรลูกค้าไปยังสถานให้บริการที่จุด 3 หรือ 5 ภายใต้เงื่อนไขว่าลูกค้าจะรับการบริการจากสถานให้บริการที่อยู่ใกล้ตนเองมากที่สุด ดังแสดงโดยการขีดเส้นใต้ในตารางที่ 2 และ $N = 2$

ตารางที่ 2 ระยะทางระหว่างลูกค้าที่ถูกจัดสรรให้แก่สถานให้บริการที่เปิด 2 แห่ง

ลูกค้า/สถานให้บริการ	1	2	3	4	5
1	16	82	<u>20</u>	6	40
2	40	28	94	87	<u>37</u>
3	7	31	<u>19</u>	64	44
4	94	7	35	79	<u>23</u>
5	56	16	82	47	<u>70</u>
6	44	12	<u>6</u>	9	76
7	4	89	<u>28</u>	92	52
8	36	43	<u>35</u>	40	87
9	50	56	34	69	<u>32</u>
10	57	36	99	21	<u>23</u>

ขั้นที่ 3 เนื่องจากจำนวนสถานให้บริการที่เปิดมีค่าเท่ากับจำนวนที่ต้องการแล้ว $(N = p = 2)$ ดังนั้นไปยังขั้นตอนการพัฒนาคำตอบ

<u>ขั้นตอนการพัฒนาคำตอบ</u>

<u>รอบที่ 1</u>

ขั้นที่ 1 กำหนดให้ค่าขอบเขตบนคือระยะทางระหว่างลูกค้ากับสถานให้บริการที่เปิดที่มีค่ามากที่สุดจากคำตอบเริ่มต้นที่ได้จากกระบวนการข้างต้น นั่นคือ $u = d_{55} = 70$

ขั้นที่ 2 กำหนดให้ปัญหาการเลือกตำแหน่งที่ตั้งยังไม่มีการเปิดสถานให้บริการที่จุดใดเลยและ $N = 0$ ทำการปรับปรุงเมทริกซ์ระยะทางระหว่างลูกค้ากับสถานให้บริการซึ่งแสดงโดยเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 16 & M & 20 & 6 & 40 \\ 40 & 28 & M & M & 37 \\ 7 & 31 & 19 & 64 & 44 \\ M & 7 & 35 & M & 23 \\ 56 & 16 & M & 47 & M \\ 44 & 12 & 6 & 9 & M \\ 4 & M & 28 & M & 52 \\ 36 & 43 & 35 & 40 & M \\ 50 & 56 & 34 & 69 & 32 \\ 57 & 36 & M & 21 & 23 \end{bmatrix} ;\ M >> 70$$

ขั้นที่ 3 เนื่องจากไม่มีแถวใดในเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นค่าคงที่ M ไปยังขั้นที่ 4

ขั้นที่ 4 ให้ $N = N + 1 = 1$ จากเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ จะเห็นได้ว่าลูกค้าคนที่ 2, 4, 5 และ 7 มีจำนวนสถานให้บริการที่มีระยะทางน้อยกว่าค่าขอบเขตบน $(a_{ij} < u)$ เท่ากัน คือ 3 แห่ง กำหนดให้ $\mathbf{B}_i$ แทนเซตของสถานให้บริการที่ $a_{ij} \neq M$ นั่นคือ $\mathbf{B}_2 = \{1,2,5\}$, $\mathbf{B}_4 = \{2,3,5\}$, $\mathbf{B}_5 = \{1,2,4\}$ และ $\mathbf{B}_7 = \{1,3,5\}$ เนื่องจากสถานให้บริการที่จุด 1, 2, 3, 4 และ 5 สามารถให้บริการแก่ลูกค้าจำนวน 9, 8, 7, 7 และ 7 ตามลำดับ ดังนั้นเลือกเปิดสถานให้บริการที่ตำแหน่ง $j_1 = 1$ (เรียกว่า *สถานให้บริการที่จุด 1*) จากนั้นทำการจัดสรรลูกค้าไปยังสถานให้บริการที่เปิด ดังแสดงโดยการขีดเส้นใต้ในตารางที่ 3

ตารางที่ 3 ระยะทางระหว่างลูกค้าที่ถูกจัดสรรให้แก่สถานให้บริการที่เปิด 1 แห่ง (*สถานให้บริการที่จุด 1*)

ลูกค้า/สถานให้บริการ	1	2	3	4	5
1	<u>16</u>	*M*	20	6	40
2	<u>40</u>	28	*M*	*M*	37
3	<u>7</u>	31	19	64	44
4	*M*	7	35	*M*	23
5	<u>56</u>	16	*M*	47	*M*
6	<u>44</u>	12	6	9	*M*
7	<u>4</u>	*M*	28	*M*	52
8	<u>36</u>	43	35	40	*M*
9	<u>50</u>	56	34	69	32
10	<u>57</u>	36	*M*	21	23

ขั้นที่ 5 ให้ $N = N + 1 = 2$ พิจารณาสถานให้บริการที่จุด 2, 3, 4 และ 5 พบว่าจำนวนลูกค้าที่อยู่ห่างจากสถานให้บริการไม่เกินค่าขอบเขตบนมีค่าเท่ากับ 8, 7, 7 และ 7 ตามลำดับ ดังนั้นเลือกเปิดสถานให้บริการที่ตำแหน่ง $j_2 = 2$ (เรียกว่า *สถานให้บริการที่จุด 2*) จากนั้นทำการจัดสรรลูกค้าไปยังสถานให้บริการที่จุด 1 หรือ 2 ภายใต้เงื่อนไขว่าลูกค้าจะรับการบริการจากสถานให้บริการที่อยู่ใกล้ตนเองมากที่สุดดังแสดงโดยการขีดเส้นใต้ในตารางที่ 4

ตารางที่ 4 ระยะทางระหว่างลูกค้าที่ถูกจัดสรรให้แก่สถานให้บริการที่เปิด 2 แห่ง (*สถานให้บริการที่จุด 1* และ *2*)

ลูกค้า/สถานให้บริการ	1	2	3	4	5
1	<u>16</u>	*M*	20	6	40
2	40	<u>28</u>	*M*	*M*	37
3	<u>7</u>	31	19	64	44
4	*M*	<u>7</u>	35	*M*	23
5	56	<u>16</u>	*M*	47	*M*
6	44	<u>12</u>	6	9	*M*
7	<u>4</u>	*M*	28	*M*	52
8	<u>36</u>	43	35	40	*M*
9	<u>50</u>	56	34	69	32
10	57	<u>36</u>	*M*	21	23

ขั้นที่ 6 เนื่องจากสถานให้บริการที่เปิดมีจำนวนเท่ากับจำนวนสถานให้บริการที่ต้องการ *p* $(N = p = 2)$ และลูกค้าทุกคนได้รับการให้บริการ ดังนั้นกำหนดให้ค่าขอบเขตบนใหม่มีค่าเท่ากับระยะทางระหว่างลูกค้ากับสถานให้บริการที่เปิดที่มีค่ามากที่สุด นั่นคือ $u = d_{91} = 50$ และไปยังขั้นตอนที่ 2

<u>รอบที่ 2</u>

ขั้นที่ 2 กำหนดให้ปัญหาการเลือกตำแหน่งที่ตั้งยังไม่มีการเปิดสถานให้บริการที่จุดใดเลยและ $N = 0$ ทำการปรับปรุงเมทริกซ์ระยะทางระหว่างลูกค้ากับสถานให้บริการซึ่งแสดงโดยเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 16 & M & 20 & 6 & 40 \\ 40 & 28 & M & M & 37 \\ 7 & 31 & 19 & M & 44 \\ M & 7 & 35 & M & 23 \\ M & 16 & M & 47 & M \\ 44 & 12 & 6 & 9 & M \\ 4 & M & 28 & M & M \\ 36 & 43 & 35 & 40 & M \\ M & M & 34 & M & 32 \\ M & 36 & M & 21 & 23 \end{bmatrix} ;\ M >> 50$$

ขั้นที่ 3 เนื่องจากไม่มีแถวใดในเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ มีสมาชิกทุกตัวเป็นค่าคงที่ M ไปยังขั้นที่ 4

ขั้นที่ 4 ให้ $N = N + 1 = 1$ จากเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ จะเห็นได้ว่าลูกค้าคนที่ 5, 7 และ 9 มีจำนวนสถานให้บริการที่มีระยะทางน้อยกว่าค่าขอบเขตบน $(a_{ij} < u)$ เท่ากัน คือ 2 แห่ง และ $\mathbf{B}_5 = \{2,4\}$, $\mathbf{B}_7 = \{1,3\}$ และ $\mathbf{B}_9 = \{3,5\}$ เนื่องจากสถานให้บริการที่จุด 1, 2, 3, 4 และ 5 สามารถให้บริการแก่ลูกค้าที่เหลือได้จำนวน 6, 7, 7, 5 และ 6 ตามลำดับ ดังนั้นเลือกเปิดสถานให้บริการที่ $j_1 = 2$ (เรียกว่า *สถานให้บริการที่จุด 2*) (เนื่องจาก $a_{52} = 16 < a_{73} = 28$) จากนั้นทำการจัดสรรลูกค้าไปยังสถานให้บริการที่เปิด ดังแสดงโดยการขีดเส้นใต้ในตารางที่ 5

ขั้นที่ 5 ให้ $N = N + 1 = 2$ พิจารณาสถานให้บริการที่จุด 1, 3, 4 และ 5 พบว่าจำนวนลูกค้าที่อยู่ห่างจากสถานให้บริการไม่เกินค่าขอบเขตบนมีค่าเท่ากับ 6, 7, 5 และ 6 ตามลำดับ ดังนั้นเลือกเปิดสถานให้บริการที่ตำแหน่ง $j_2 = 3$ (เรียกว่า *สถานให้บริการที่จุด 3*) จากนั้นทำการจัดสรรลูกค้าไปยังสถานให้บริการที่จุด 2 หรือ 3 ภายใต้เงื่อนไขว่าลูกค้าจะรับการบริการจากสถานให้บริการที่อยู่ใกล้ที่สุดดังแสดงโดยการขีดเส้นใต้ในตารางที่ 6

ตารางที่ 5 ระยะทางระหว่างลูกค้าที่ถูกจัดสรรให้แก่สถานให้บริการที่เปิด 1 แห่ง (*สถานให้บริการที่จุด 2*)

ลูกค้า/สถานให้บริการ	1	2	3	4	5
1	16	*M*	20	6	40
2	40	<u>28</u>	*M*	*M*	37
3	7	<u>31</u>	19	*M*	44
4	*M*	<u>7</u>	35	*M*	23

5	*M*	<u>16</u>	*M*	47	*M*
6	44	<u>12</u>	6	9	*M*
7	4	*M*	28	*M*	*M*
8	36	<u>43</u>	35	40	*M*
9	*M*	*M*	34	*M*	32
10	*M*	<u>36</u>	*M*	21	23

ตารางที่ 6 ระยะทางระหว่างลูกค้าที่ถูกจัดสรรให้แก่สถานให้บริการที่เปิด 2 แห่ง (*สถานให้บริการที่จุด 2* และ *3*)

ลูกค้า/สถานให้บริการ	1	2	3	4	5
1	16	*M*	<u>20</u>	6	40
2	40	<u>28</u>	*M*	*M*	37
3	7	31	<u>19</u>	*M*	44
4	*M*	<u>7</u>	35	*M*	23
5	*M*	<u>16</u>	*M*	47	*M*
6	44	12	<u>6</u>	9	*M*
7	4	*M*	<u>28</u>	*M*	*M*
8	36	43	<u>35</u>	40	*M*
9	*M*	*M*	<u>34</u>	*M*	32
10	*M*	<u>36</u>	*M*	21	23

ขั้นที่ 6 เนื่องจากสถานให้บริการที่เปิดมีจำนวนเท่ากับจำนวนสถานให้บริการที่ต้องการ *p* $(N = p = 2)$ และลูกค้าทุกคนได้รับการให้บริการ ดังนั้นกำหนดให้ค่าขอบเขตบนใหม่มีค่าเท่ากับระยะทางระหว่างลูกค้ากับสถานให้บริการที่เปิดที่มีค่ามากที่สุด นั่นคือ $u = d_{102} = 36$ และไปยังขั้นตอนที่ 2

<u>**รอบที่ 3**</u>

ขั้นที่ 2 กำหนดให้ปัญหาการเลือกตำแหน่งที่ตั้งยังไม่มีการเปิดสถานให้บริการที่จุดใดเลยและ $N = 0$ ทำการปรับปรุงเมทริกซ์ระยะทางระหว่างลูกค้ากับสถานให้บริการ ซึ่งแสดงโดยเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 16 & M & 20 & 6 & M \\ M & 28 & M & M & M \\ 7 & 31 & 19 & M & M \\ M & 7 & 35 & M & 23 \\ M & 16 & M & M & M \\ M & 12 & 6 & 9 & M \\ 4 & M & 28 & M & M \\ M & M & 35 & M & M \\ M & M & 34 & M & 32 \\ M & M & M & 21 & 23 \end{bmatrix} ;\ M >> 36$$

ขั้นที่ 3 เนื่องจากไม่มีแถวใดในเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นค่าคงที่ M ไปยังขั้นที่ 4

ขั้นที่ 4 ให้ $N = N + 1 = 1$ จากเมทริกซ์ $\mathbf{A}$ จะเห็นได้ว่าลูกค้าคนที่ 2, 5 และ 8 มีจำนวนสถานให้บริการที่มีระยะทางน้อยกว่าค่าขอบเขตบน $(a_{ij} < u)$ เท่ากัน คือ 1 สถานให้บริการ และ $\mathbf{B}_2 = \{2\},\ \mathbf{B}_5 = \{2\}$ และ $\mathbf{B}_8 = \{3\}$ เนื่องจากสถานให้บริการที่จุด 2 และ 3 สามารถให้บริการแก่ลูกค้าได้จำนวน 5 และ 7 ตามลำดับ ดังนั้นเลือกเปิดสถานให้บริการที่ $j_1 = 3$(เรียกว่า *สถานให้บริการที่จุด 3*) จากนั้นทำการจัดสรรลูกค้าไปยังสถานให้บริการที่เปิด ดังแสดงโดยการขีดเส้นใต้ในตารางที่ 7

ตารางที่ 7 ระยะทางระหว่างลูกค้าที่ถูกจัดสรรให้แก่สถานให้บริการที่เปิด 1 แห่ง (*สถานให้บริการที่จุด 3*)

ลูกค้า/สถานให้บริการ	1	2	3	4	5
1	16	*M*	<u>20</u>	6	*M*
2	*M*	28	*M*	*M*	*M*
3	7	31	<u>19</u>	*M*	*M*
4	*M*	7	<u>35</u>	*M*	23
5	*M*	16	*M*	*M*	*M*
6	*M*	12	<u>6</u>	9	*M*
7	4	*M*	<u>28</u>	*M*	*M*
8	*M*	*M*	<u>35</u>	*M*	*M*
9	*M*	*M*	<u>34</u>	*M*	32
10	*M*	*M*	*M*	21	23

ขั้นที่ 5 ให้ $N = N + 1 = 2$ พิจารณาสถานให้บริการที่จุด 1, 2, 4 และ 5 พบว่าจำนวนลูกค้าที่อยู่ห่างจากสถานให้บริการไม่เกินค่าขอบเขตบนมีค่าเท่ากับ 3, 5, 3

และ 3 ตามลำดับ ดังนั้นเลือกเปิดสถานให้บริการที่ตำแหน่ง $j_2 = 2$ (เรียกว่า *สถานให้บริการที่จุด 2*) จากนั้นทำการจัดสรรลูกค้าไปยังสถานให้บริการที่จุด 2 หรือ 3 ภายใต้เงื่อนไขว่าลูกค้าจะรับการบริการจากสถานให้บริการที่อยู่ใกล้ตนเองมากที่สุดดังแสดงโดยการขีดเส้นใต้ในตารางที่ 8

ตารางที่ 8 ระยะทางระหว่างลูกค้าที่ถูกจัดสรรให้แก่สถานให้บริการที่เปิด 2 แห่ง (*สถานให้บริการที่จุด 2* และ *3*)

ลูกค้า/สถานให้บริการ	1	2	3	4	5
1	16	*M*	<u>20</u>	6	*M*
2	*M*	<u>28</u>	*M*	*M*	*M*
3	7	31	<u>19</u>	*M*	*M*
4	*M*	<u>7</u>	35	*M*	23
5	*M*	<u>16</u>	*M*	*M*	*M*
6	*M*	12	<u>6</u>	9	*M*
7	4	*M*	<u>28</u>	*M*	*M*
8	*M*	*M*	<u>35</u>	*M*	*M*
9	*M*	*M*	<u>34</u>	*M*	32
10	*M*	*M*	*M*	21	23

ขั้นที่ 6 เนื่องจากจำนวนสถานให้บริการที่เปิดมีค่าเท่ากับจำนวนที่ต้องการ $(N = p = 2)$ และมีลูกค้าบางคนไม่ได้รับบริการ จากตารางที่ 8 จะเห็นได้ว่าลูกค้าคนที่ 10 ไม่ได้รับการจัดสรรให้แก่สถานให้บริการใดเลย ดังนั้นจบการทำงาน เพราะไม่สามารถปรับปรุงค่าขอบเขตบนให้มีค่าดีกว่า $u = 36$ ได้แล้ว คำตอบของปัญหาในตัวอย่างนี้ คือ $\mathbf{y} = (0,1,1,0,0)$ ค่าของตัวแปรตัดสินใจ $\mathbf{x}$ ที่สอดคล้องกับตารางที่ 6 แสดงโดยเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จากการแก้ปัญหาในตัวอย่างนี้ด้วยโปรแกรม excel พบว่าค่าของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ที่ดีที่สุดสำหรับปัญหานี้คือ $z = 36$ นั่นคือ คำตอบที่ได้จากขั้นตอนวิธีที่นำเสนอในงานวิจัยนี้เป็นคำตอบที่ดีที่สุดสำหรับปัญหาในตัวอย่างนี้ด้วย ขั้นตอนวิธีการหาคำตอบแบบฮิวริสติกส์ที่นำเสนอในงานวิจัยนี้สามารถหาคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหาพีเซนเตอร์ได้เมื่อปัญหามีขนาดใหญ่ขึ้นเนื่องจากขั้นตอนการหาคำตอบในแต่ละขั้นตอนเข้าใจได้ง่ายและไม่มีความซับซ้อน ในขณะที่การแก้ปัญหาพีเซนเตอร์โดยใช้โปรแกรม excel สามารถหาคำตอบสำหรับปัญหาที่มีขนาดไม่ใหญ่มากนัก นอกจากนี้ขั้นตอนการหาคำตอบที่นำเสนอนี้ยังสามารถทำงานได้ดีและเร็วในปัญหาที่มีการกระจายตัวของตำแหน่งลูกค้าและสถานให้บริการมาก (ระยะทางระหว่างลูกค้าและสถานให้บริการมีค่าแตกต่างกันมากๆ) เนื่องจากในขั้นตอนการปรับปรุงเมทริกซ์ระยะทาง $(\mathbf{A})$ จะเปลี่ยนระยะทางที่มีค่าไม่น้อยกว่าขอบเขตบนให้มีค่ามากกว่าขอบเขตบนมากๆ (M) กล่าวคือ ไม่พิจารณาคำตอบที่สอดคล้องกับระยะทาง M ทำให้บริเวณของคำตอบที่เป็นไปได้ลดลงมาก

5. ผลการจำลองสถานการณ์ทางคอมพิวเตอร์

หัวข้อนี้เป็นการนำเสนอประสิทธิภาพของขั้นตอนวิธีที่ได้นำเสนอในบทความนี้ โดยแสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้กับผลเฉลยที่ดีที่สุดที่ได้จากการแก้ปัญหาพีเซนเตอร์โดยใช้โปรแกรม AIMMS สำหรับปัญหาพีเซนเตอร์ที่มีจำนวนลูกค้า และสถานให้บริการ $(n \times m)$ แตกต่างกันทั้งหมด 6 กรณี ค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองปัญหาพีเซนเตอร์ประกอบด้วยจำนวนสถานให้บริการที่ต้องการเปิด และระยะทางระหว่างลูกค้าและสถานให้บริการ ซึ่งระยะทางระหว่างลูกค้าและสถานให้บริการนั้นเกิดจากการสุ่มตัวเลขจากช่วงของตัวเลขที่แตกต่างกัน ดังแสดงในตารางที่ 1

ตารางที่ 1. ค่าพารามิเตอร์และช่วงของการสุ่มพารามิเตอร์สำหรับปัญหาพีเซนเตอร์

จำนวนลูกค้า × สถานให้บริการ $(n \times m)$	จำนวนสถานให้บริการที่ต้องการเปิด (p)	ระยะทางระหว่างลูกค้าและสถานให้บริการ
10 × 6	3	[1 , 100]
30 × 10	5	[1 , 100]
50 × 10	5	[1 , 100]
100 × 10	5	[10 , 250]
200 × 20	10	[10 , 250]
300 × 30	10	[10 , 250]

ผลการทดสอบประสิทธิภาพของขั้นตอนวิธีที่ได้นำเสนอไปในหัวข้อที่ 3 แสดงในรูปของค่าเฉลี่ยของค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ เปอร์เซ็นต์ของระยะห่างจากผลเฉลยที่ดีที่สุด (Optimality gap) และค่าเฉลี่ยของเวลาในการหาคำตอบสำหรับการจำลองปัญหาขนาดต่างๆที่กำหนดข้างต้นจำนวน 10 ตัวอย่างดังแสดงในตารางที่ 2

ตารางที่ 2. ผลการทดสอบขั้นตอนวิธีที่นำเสนอในงานวิจัยนี้โดยการเปรียบเทียบกับผลเฉลยที่ดีที่สุดที่ได้จากโปรแกรม AIMMS

ขนาดของปัญหาพีเซนเตอร์ $(n \times m \times p)$	ค่าเฉลี่ยของผลเฉลยที่ดีที่สุด	ค่าเฉลี่ยของผลเฉลยที่ได้จากขั้นตอนวิธีที่ได้นำเสนอ	ระยะห่างจากผลเฉลยที่ดีที่สุด (%)	เวลาที่ใช้ในการหาผลเฉลยที่ดีที่สุด (วินาที)	เวลาที่ใช้ในการหาคำตอบโดยขั้นตอนวิธีที่ได้นำเสนอ (วินาที)
10 × 6 × 3	44.2	44.4	0.5128	30.888	4.3992
30 × 10 × 5	40.4	40.4	0.0000	45.7707	1.3104
50 × 10 × 5	46.1	46.3	0.3902	36.5042	5.2416
100 × 10 ×5	74.0	74.2	0.2740	36.3170	7.5816
200 × 20 × 10	47.7	48.1	0.8788	26.5826	13.1977
300 × 30 × 10	71.2	82.7	16.1898	62.1070	7.7688

ระยะห่างจากผลเฉลยที่ดีที่สุดคำนวณจากสมการ $\text{Gap} = \frac{\tilde{z} - z^*}{z^*}$ โดยที่ $\tilde{z}$ คือค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ที่ได้จากขั้นตอนวิธีที่ได้นำเสนอ และ z^* คือค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ที่สอดคล้องกับผลเฉลยที่ดีที่สุด ตารางที่ 2 แสดงให้เห็นว่าขั้นตอนวิธีที่ได้นำเสนอในงานวิจัยนี้สามารถปรับปรุงค่าขอบเขตบนของปัญหาพีเซนเตอร์ขนาดเล็ก (ปัญหาที่มีจำนวนลูกค้าและสถานให้บริการไม่เกิน 300 × 30) ได้อย่างมีประสิทธิภาพ โดยมีค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์ต่างจากค่าที่ดีที่สุดไม่เกิน 17% นอกจากขั้นตอนวิธีที่ได้นำเสนอในงานนี้ยังใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่า 14 วินาที ในขณะที่การหาผลเฉลยที่ดีที่สุดใช้เวลามากที่สุด 63 วินาที

เมื่อปัญหาพีเซนเตอร์มีจำนวนลูกค้าและสถานให้บริการเท่ากับ 500×50 โปรแกรม AIMMS ไม่สามารถหาค่าผลเฉลยที่ดีที่สุดได้ (เมื่อกำหนดให้โปรแกรมหยุดทำงานเมื่อใช้เวลาเกิน 24 ชั่วโมง) ดังนั้นในการจำลองปัญหาพีเซนเตอร์ที่มีขนาดใหญ่กว่า 500×50 (เรียกว่าปัญหาขนาดใหญ่) นั้นผลการทดสอบขั้นตอนวิธีที่ได้นำเสนอจะแสดงในรูปของค่าผลเฉลี่ยของค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์และเวลาที่ใช้ในการหาคำตอบโดยใช้ขั้นตอนวิธีที่ได้นำเสนอในงานวิจัยนี้ ตารางที่ 3 และตารางที่ 4 แสดงค่าพารามิเตอร์และผลการทดสอบขั้นตอนวิธีที่ได้นำเสนอสำหรับปัญหาพีเซนเตอร์ขนาดใหญ่ จากตารางที่ 4 จะเห็นได้ว่าขั้นตอนวิธีที่ได้นำเสนอในงานวิจัยนี้สามารถหาคำตอบของปัญหาพีเซนเตอร์ได้ภายในเวลาประมาณ 22 นาที หรือ 1,290 วินาที ในขณะที่ผลเฉลยที่ดีที่สุดไม่สามารถหาค่าได้ภายใต้กำหนดเวลาในการรันโปรแกรม 24 ชั่วโมง หรือ 86,400 วินาที

ตารางที่ 3. ค่าพารามิเตอร์และช่วงของการสุ่มพารามิเตอร์สำหรับปัญหาพีเซนเตอร์

จำนวนลูกค้า × สถานให้บริการ $(n \times m)$	จำนวนสถานให้บริการที่ต้องการเปิด (p)	ระยะทางระหว่างลูกค้าและสถานให้บริการ
500 × 50	20	[10 , 500]
1,500 × 100	50	[10 , 1500]
3,000 × 1,000	100	[10 , 3000]

ตารางที่ 4. ผลการทดสอบขั้นตอนวิธีสำหรับปัญหาขนาดใหญ่

ขนาดของปัญหาพีเซนเตอร์ $(n \times m \times p)$	ค่าเฉลี่ยของค่าฟังก์ชันวัตถุประสงค์	เวลาที่ใช้ในการหาคำตอบ (วินาที)
500 × 50 × 20	91.4	1.6864
1,500 × 100 × 50	126.6	17.3270
3,000 × 1,000 × 100	123.4	1289.6135

6. สรุป

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาปัญหาการเลือกตำแหน่งที่ตั้งสถานให้บริการแบบปัญหาพีเซนเตอร์คือต้องการเลือกตำแหน่งที่เหมาะสมสำหรับการจัดตั้งสถานให้บริการจำนวน p แห่ง เพื่อให้ระยะทางระหว่างสถานให้บริการกับลูกค้าคนที่อยู่ไกลที่สุดมีค่าน้อยที่สุด โดยพิจารณาปัญหาแบบไม่มีข้อจำกัดทางด้านความสามารถในการผลิตหรือความจุ ใน

บทความนี้ได้นำเสนอข้อเสนอเพื่อช่วยลดขนาดบริเวณของคำตอบที่เป็นไปและขั้นตอนวิธีในการหาคำตอบแบบฮิวริสติกส์เพื่อแก้ปัญหาพีเซนเตอร์แบบไม่มีข้อจำกัด ผลเฉลยที่ได้จากขั้นตอนวิธีที่นำเสนอในงานวิจัยนี้เป็นคำตอบที่เป็นไปได้เสมอ โดยผลเฉลยดังกล่าวอาจเป็นผลเฉลยที่ดีที่สุดหรือไม่ก็ได้ ขั้นตอนวิธีการปรุงปรับค่าขอบเขตบนสำหรับปัญหาพีเซนเตอร์ที่ได้นำเสนอในบทความนี้เป็นการหาคำตอบแบบฮิวริสติกส์โดยมีแนวคิดคล้ายกับวิธีการตัดระนาบ (Cutting plane) และวิธีการหาคำตอบแบบละโมบ (Greedy algorithm) เนื่องจากมีขั้นตอนของการลดบริเวณของคำตอบที่เป็นไปได้ในแต่ละขั้นตอนการวนซ้ำ และในการเลือกเปิดสถานให้บริการหรือการจัดสรรลูกค้าไปยังสถานให้บริการนั้นมีเงื่อนไขในการเลือกเพื่อผลจากการเลือกนั้นมีค่าดีที่สุดในแต่ละครั้งด้วย ในขณะที่ขั้นตอนวิธีที่เป็นที่นิยมใช้ในการหาคำตอบสำหรับปัญหาพีเซนเตอร์ในปัจจุบันจะเป็นขั้นตอนวิธีที่ได้แนวคิดมาจากธรรมชาติ เช่น วิธีการค้นหาคำตอบแบบประสาน วิธีการเชิงพันธุกรรม และวิธีอาณานิคมผึ้ง เป็นต้น โดยขั้นตอนวิธีดังกล่าวไม่ได้พิจารณาลักษณะโครงสร้างของปัญหานั้น

นอกจากนี้ได้มีการแสดงตัวอย่างขั้นตอนวิธีในการหาคำตอบของปัญหาอย่างละเอียดในหัวข้อที่ 4 และแสดงผลการทดสอบขั้นตอนวิธีที่ได้นำเสนอโดยการจำลองปัญหาพีเซนเตอร์ที่มีขนาดของปัญหาต่างๆกันในหัวข้อที่ 5 ซึ่งจากผลการทดสอบประสิทธิภาพของขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลยโดยการเปรียบเทียบกับผลเฉลยที่ดีที่สุดที่ได้จากการใช้โปรแกรม AIMMS แสดงให้เห็นว่าขั้นตอนวิธีที่ได้นำเสนอในงานวิจัยนี้สามารถให้ค่าขอบเขตบนสำหรับฟังก์ชันวัตถุประสงค์ที่ห่างจากค่าที่ดีที่สุดไม่เกิน 1% สำหรับปัญหาที่มีจำนวนลูกค้าและสถานให้บริการน้อยกว่า 200 x 20 และไม่เกิน 17% สำหรับปัญหาที่มีขนาด 300 x 30 อีกทั้งยังใช้เวลาในการหาผลเฉลยน้อยกว่าเวลาที่ใช้ในการหาผลเฉลยที่ดีที่สุดอีกด้วย สำหรับปัญหาพีเซนเตอร์ขนาดใหญ่นั้นผลเฉลยที่ดีที่สุดไม่สามารถหาค่าได้ภายใต้การกำหนดเวลาที่มากที่สุดในการใช้รันโปรแกรม ในขณะที่ขั้นตอนวิธีที่ได้นำเสนอในบทความนี้สามารถหาค่าผลเฉลยได้โดยใช้เวลาประมาณ 22 นาที

7. เอกสารอ้างอิง

[1] O. Kariv and S. L. Hakimi, “An algorithmic approach to network location problems part I: the p-centers,” *SIAM Journal of Applied Mathematics*., Vol. 37 (3), pp. 513-538, 1979.

[2] M. R. Garey and D. S. Johnson, Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness, United States of America: W. H. Freeman Co., 1978.

[3] F. A. Ozsoy and M. C. Panar, “An exact algorithm for the capacitated vertex p-center problem,” *Computer Operational Research.,* Vol. 33 (5), pp. 1420-1436, 2006.

[4] M. Albareda-Sambola and J. A. Diaz, “Lagrangean duals and exact solution to the capacitated p-center problem,” *European Journal of Operational Research.,* Vol. 201 (1), pp. 71-81, 2010.

[5] M. P. Scaparra, S. Pallottino and M. G. Scutella, “Large scale local search heuristics for the capacitated vertex p-center problem,” *Networks*., Vol. 43 (4), pp. 241–255, 2004.

[6] P. Hansen, J. Brimberg, D. Urosevic and N. Mladenovic, “Solving large p-median clustering problems by primal-dual variable neighborhood search,” *Data Mining and Knowledge Discovery*., Vol. 19 (3), pp. 351–375, 2009.

[7] A. Kaveh and H. Nasr, “Solving the conditional and unconditional p-center problem with modified harmony search: A real case study,” *Scientia Iranica,* Vol. 18 (4), pp. 867-877, 2011.

[8] W. Pullan, “A memetic genetic algorithm for the vertex p-center problem,” *Evolutionary Computation.,* Vol. 16 (3), pp. 417-436, 2008.

[9] T. Davidovic, D. Ramljak, M. Selmic and D. Teodorovic, “Bee colony optimization for the p-center problem,” *Computers & Operations Research.,* Vol. 38, pp. 1367-1376, 2011.